2.2 Circuit inductif en régime transitoire

L’énergie emmagasinée dans un condensateur était associée à la tension entre les bornes de ce condensateur, par contre la quantité d’énergie emmagasinée dans le champ magnétique d’une inductance dépend du courant qui la traverse.
Inductance : est un noyau isolant entouré par un fil conducteur parcouru par un courant, et caractérisé par le matériau sur lequel le fil est enroulé :

- air, matériau magnétique (TV, radio, filtres),
- matériau ferro magnétique (filtre, source de tension, transformateur)

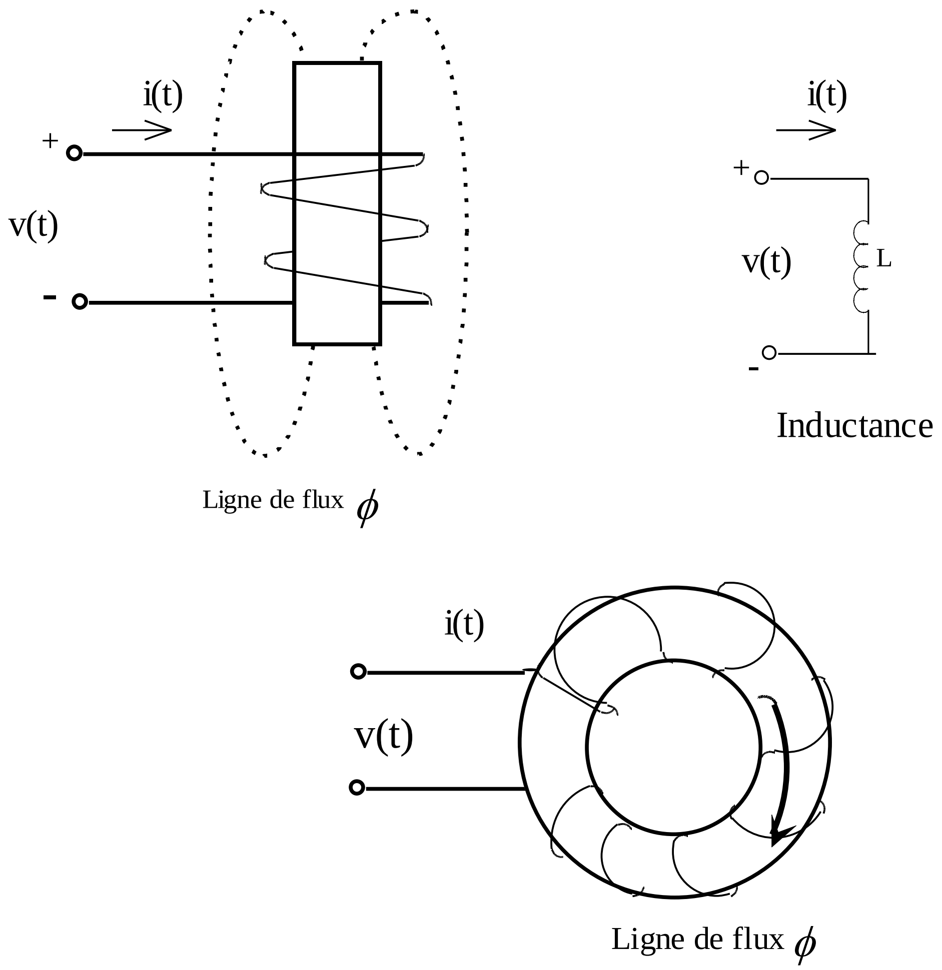


Fig. 2.10. La conductance

La valeur de l’inductance en fonction des paramètres de la bobine est :

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l} \quad \text{(unité : henry (H))}$$

Avec N : Nombre de spires, avec Flux O dans chaque spire.
Le flux magnétique total :

$$\lambda = NO \ \text{: Weber (Wb)}$$

A : aire (section du noyau) (m²).
l : la longueur effective (utile).
$\mu =$ La perméabilité ($\mu = \mu_0 \mu_r$) avec μ_r : perméabilité relative
μ_0 : Perméabilité absolue ($\mu_0 = 4\pi \ . 10^{-7}$ H/m).

Et on a aussi : $\lambda = \mathrm{Li}$, le flux est donc proportionnel au courant. On a aussi :

$$v = \frac{d\lambda}{dt}$$

La tension est égale au taux de changement du champ magnétique.

$$v = \frac{L\ di}{dt}$$

Si on répète le même développement que pour un condensateur, on obtient :

$$v = \frac{L\ di}{dt} \Rightarrow di = \frac{1}{L} v\ \ dt \Rightarrow$$

$$i(t) = \int di = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v(t)\ dt$$ $\Rightarrow$ on sépare cette intégrale en 2 : $\Rightarrow$

$$i(t) = \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(t)\ dt}_{i(t_0)} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v(t)\ dt$$

$$\boxed{i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v(t)\ dt + i(t_0)}$$

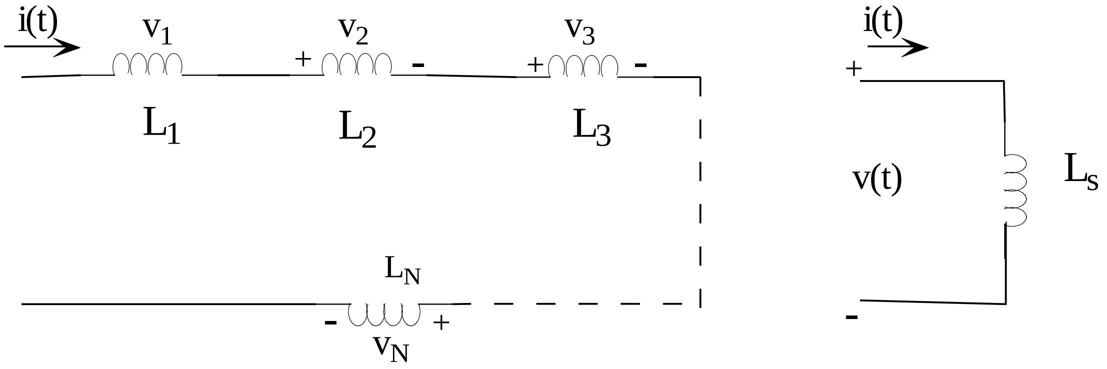
$i(t_0)$ est le courant initial à t_0

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)\ \left[Joules\right]$$

$w_L(t)$:L'énergie accumulée dans l'inductance au temps t.

Remarques : L'inductance idéale emmagasine/restitue de l'énergie, elle n'en dissipe pas. Si le courant est constant, la tension est nulle, donc, dans un circuit DC, la tension aux bornes d'une inductance est nulle.

2.2-1 Inductance en série :



Inductances en série équivalent

Fig.2.11 association de n bobines en série

Loi des tensions de Kirchhoff :

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \ldots\ldots v_N(t)$$

$$v(t) = \underbrace{(L_1 + L_2 + L_3 + \ldots\ldots + L_N)}_{L_S} \frac{d}{dt} i(t) = L_s \frac{d}{dt} i(t)$$

Donc, pour N inductances en série, on a :

$$L_N = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots\ldots + L_N = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

2.2-2 Inductances en parallèle :

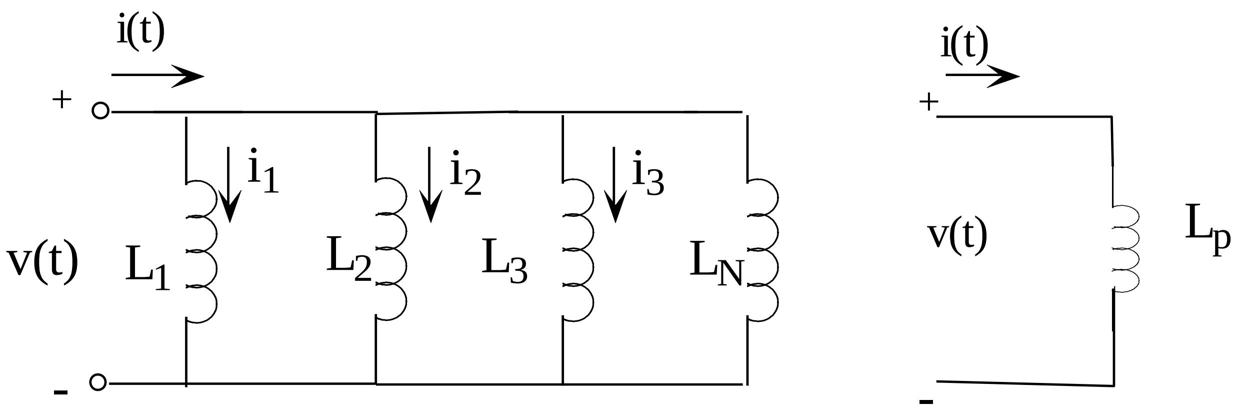


Fig.2.12 association de n bobines en parallèle

Loi des courants :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \ldots\ldots + i_N(t)$$

$$\text{mais } i_j(t) = \frac{1}{L_j}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i_j(t_0)$$

Donc, nous avons :

$$i(t) = \left[\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{L_j}\right]\int_{t_0}^{t} v\,dt + i_j(t_0)$$

On a donc, pour N inductances en parallèle :

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots\ldots\frac{1}{L_N} = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{L_j}$$

Si on a deux inductances en parallèle :

$$\frac{1}{L_p} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

On remarque que les **inductances se combinent comme des résistances** et que les **condensateurs se combinent comme des conductances.**

2.2-3 Etablissement et extinction du courant dans une bobine parfaite.

Etablissement du courant

Considérons maintenant un circuit électrique comportant en série une résistance R et une inductance propre L.

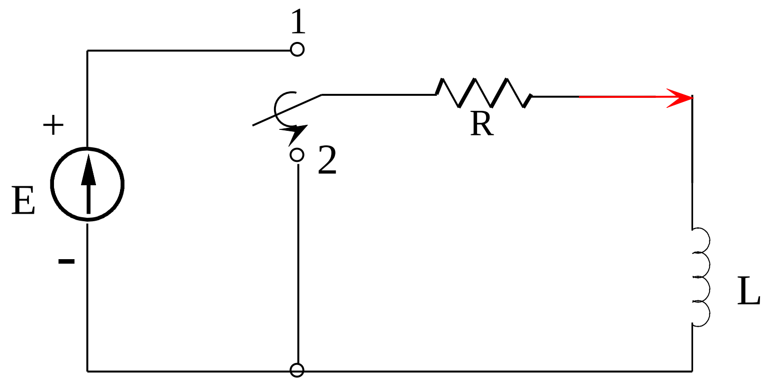


Fig. 2.13. Etablissement et excitation du courant dans une bobine

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \qquad (1)$$ D'après la loi des mailles

Cette équation différentielle 1er ordre non homogène qui a la solution suivante :

Solution de la partie **homogène** $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0$$

$$\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) \Rightarrow \frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow$$

$$\int\frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{R}{L}\int dt + cte$$

$$\ln\ i(t) = -\frac{R}{L}t + cte \Rightarrow i_h(t) = e^{-\frac{R}{L}t}.\underbrace{e^{cte}}_{C_1}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{i_h(t) = C_1 e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Solution de la partie **non homogène** : On calcule $i(t)$ dans l'équation (1) quand la variation de $i(t)$=0, c.a.d. $\frac{di(t)}{dt} = 0$, puisque $i(t)$ est constant $\Rightarrow$

$$\begin{cases} L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \\ \frac{di(t)}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow L\underbrace{\frac{di(t)}{dt}}_{0} + Ri(t) = E \Rightarrow \boxed{i_{nh}(t) = \frac{E}{R}}$$

Solution complète :

$$i(t) = i_h(t) + i_{nh}(t) = C_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

Pour t= 0 i(0) = 0 $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow C_1 = -\frac{E}{R}$

Donc $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}$ avec la constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$

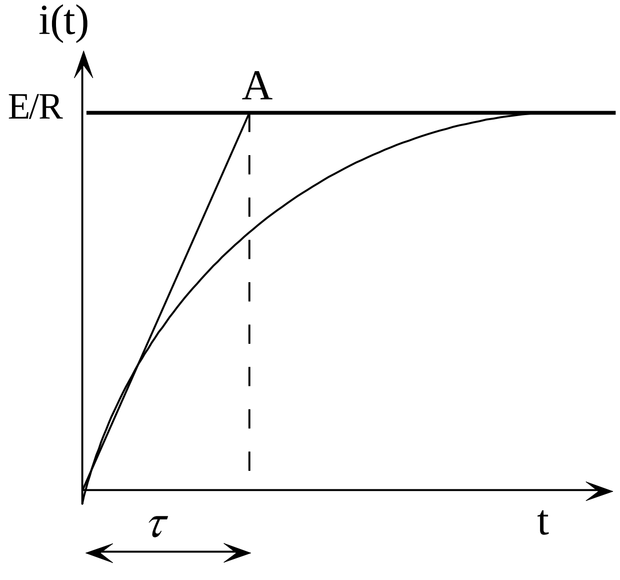


Fig.2.14 Le courant en fonction du temps

L'intersection de la tangente, à l'origine, à la courbe i(t) et de la droite $i(t) = \frac{E}{R}$ est un point A, d'abscisse τ.

La tension aux bornes de la bobine est :

$$v_L = u_L = L\frac{di(t)}{dt} = L\,\frac{d}{dt}\underbrace{\left[\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})\right]}_{i(t)}$$

$$v_L = L\,\frac{E}{R}\,\frac{d}{dt}\left[(1-e^{-\frac{R}{L}t})\right] = L\,\frac{E}{R}(-\frac{R}{L})(-e^{-\frac{R}{L}t}) = \cancel{L}\,\frac{E\,\cancel{R}}{\cancel{R}\,\cancel{L}}\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\boxed{u_L = E\,e^{-\frac{R}{L}t}}$$

L'énergie emmagasinée par la bobine :

$$w = \int_0^{\infty} u_L\, i(t)\, dt = \int_0^{\frac{E}{R}} L\frac{di}{dt} i(t)\, dt = \int_0^{\frac{E}{R}} L\, i(t) di = L\,\left[\frac{i^2(t)}{2}\right]_0^{\frac{E}{R}}$$

$$w = \frac{L}{2}\frac{E^2}{R^2}$$

Rupture du courant :

Fermons l'interrupteur K dans la position 2 à un instant t_0 suffisamment long au bout duquel nous supposons que le courant i(t) a atteint la valeur maximale $\frac{E}{R}$. Le courant circule dans le circuit selon l'expression suivante :

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0 \qquad \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0$$ équation différentielle 1^{er} ordre homogène.

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i(t) \Rightarrow \frac{di(t)}{i} = -\frac{R}{L} dt(t) \Rightarrow$$

$$\int \frac{di(t)}{i} = \int -\frac{R}{L} dt(t) + cte \Rightarrow \ln i = -\frac{R}{L} t + cte \Rightarrow$$

$$i = e^{-\frac{R}{L}t} \underbrace{e^{cte}}_{C}$$

La solution de cette équation est : $\boxed{i(t) = C e^{-\frac{R}{L}(t)}}$

A $t=t_0$ $i(t_0) = C e^{-\frac{R}{L}(t_0)} = \frac{E}{R}$ donc $C = \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}(t_0)}$

L’expression finale du courant est : $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}$

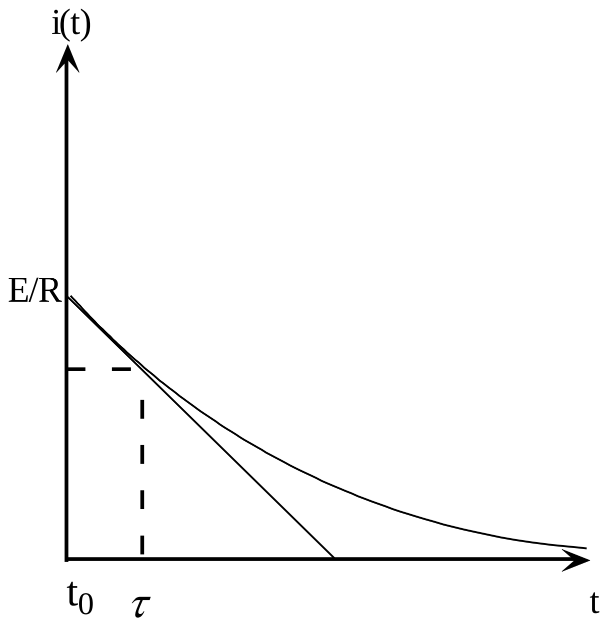


Fig. 1.15. Rupture du courant

Bilan d’énergie :

L’énergie dissipée par la résistance est :

$$w_R = \int_{t_0}^{\infty} Ri^2(t)\, dt = \int_{t_0}^{\infty} \cancel{R} \underbrace{\frac{E^2}{R^{\cancel{2}}}\; e^{-2\frac{R}{L}(t-t_0)}}_{i^2} dt \Rightarrow$$

$$w_R = \frac{E^2}{R}\left[(-\frac{L}{2R})\; e^{-2\frac{R}{L}(t-t_0)}\right]_{t_0}^{\infty} \Rightarrow$$

$$w_R = \frac{E^2}{R}\left[(-\frac{L}{2R})\; (\underbrace{e^{-2\frac{R}{L}(\infty)}}_{0} - \underbrace{e^{-2\frac{R}{L}(t_0-t_0)}}_{1}\right] \Rightarrow$$

$$w_R = \frac{E^2}{R}\left[(-\frac{L}{2R})\ (\ -1)\right] = \frac{E^2}{R}(+\frac{L}{2R}) = \frac{E^2L}{2RR} = \frac{E^2L}{2R^2}$$

$$w_R = \frac{L}{2}\frac{E^2}{R^2}$$

2.3 Circuit RLC en série en régime transitoire

Charge et décharge d'un condensateur dans un circuit RLC :

Considérons maintenant le circuit série (résistance, conductance, capacité et une source de tension E). Lorsque l'interrupteur est fermé sur la position 1, le condensateur se charge au cours du temps et il s'établit une tension à ses bornes : $u_c = \frac{q}{C}$

D'après la loi des mailles : $Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q}{C} = E$ avec $i(t) = \frac{dq}{dt}$

Donc $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q}{C} = E$ équation différentielle de 2ème ordre non homogène.

En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre du circuit

$m = \frac{R}{2L}$ Coefficient d'amortissement.

Donc cette équation s'écrit en fonction de ces paramètres comme suivant :

La solution homogène

$$\frac{\cancel{L}}{\cancel{L}}\frac{d^2q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2m}\frac{dq(t)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0{}^2}q = \frac{E}{L} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2m\frac{dq}{dt} + \omega_0{}^2\, q = \frac{E}{L}$$

La solution de cette équation est la somme d'une solution $q_h(t)$ de l'équation homogène (sans second membre et d'une solution particulière $q_{nh}(t)$ correspondant au régime définitif (forcé).

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2m\frac{dq}{dt} + \omega_0{}^2\, q = 0$$

L'introduction de cette forme dans l'équation différentielle donne une équation caractéristique du type :

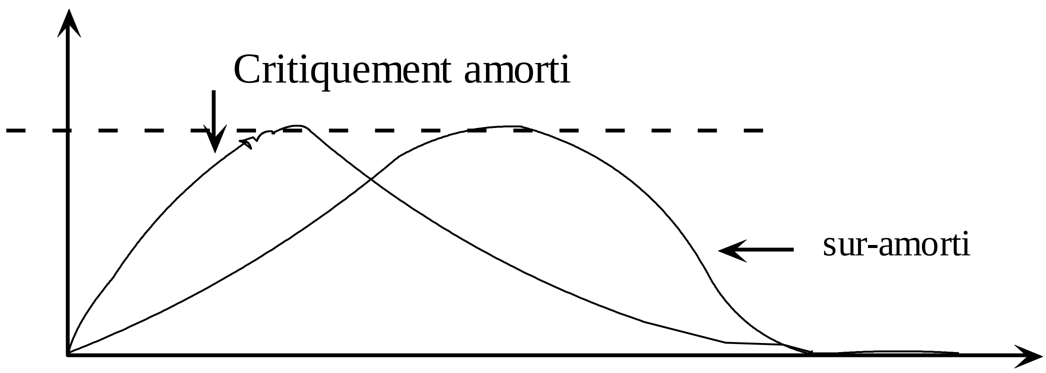
$r^2 + 2mr + \omega_0{}^2 = 0$ dont les racines sont :

$$r_{1\&2} = -m \pm \sqrt{m^2 - w_0{}^2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}_{\Delta}}$$

Suivant la valeur de Δ on peut distinguer 3 cas :

$\Delta > 0$ **racines réelles distinctes** : Cas sur-amorti (over damped). La réponse décroît et s'atténue. La solution est : $q(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ régime apériodique.

$\Delta = 0$ **racines identiques** : La solution est : $q(t) = (A + Bt)\, e^{-\frac{R}{2L}t}$ régime critique.



$\Delta < 0$ **racines complexes** conjuguées l'une de l'autre : cas sous-amorti (underdamped)

$$r_{1\&2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -m \pm j\sqrt{\omega_0{}^2 - m^2} = -m \pm j\omega$$

La partie imaginaire traduit des oscillations périodiques, mais la partie réelle est négative et décrit une atténuation exponentielle de l'amplitude. Dans ce cas le régime s'appelle régime sinusoïdal amorti ou régime pseudo-périodique.

$$q(t) = e^{-m}\ (A\cos(wt) + B\sin(wt))$$

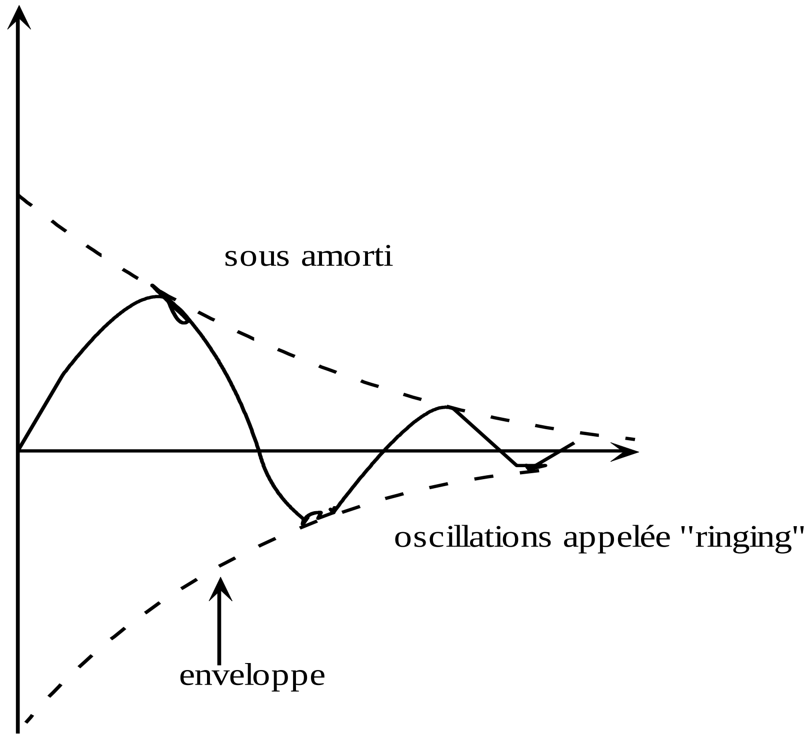


Fig 2.17. Régime sinusoïdal amorti

CHAPITRE 3 / Les circuits électriques en régime sinusoïdal

3.1 Caractérisation d’un signal sinusoïdal :

Un des types d’excitation les plus importants : l’excitation sinusoïdale. Exemples de sinusoïdales : mouvement d’un pendule, rebondissement d’une balle,… En génie électrique : radio (fréquence porteuse), transport de l’énergie électrique.
Avec les séries de Fourier, on peut ramener tout signal utile à une sinusoïdale.

Propriétés des sinusoïdes :

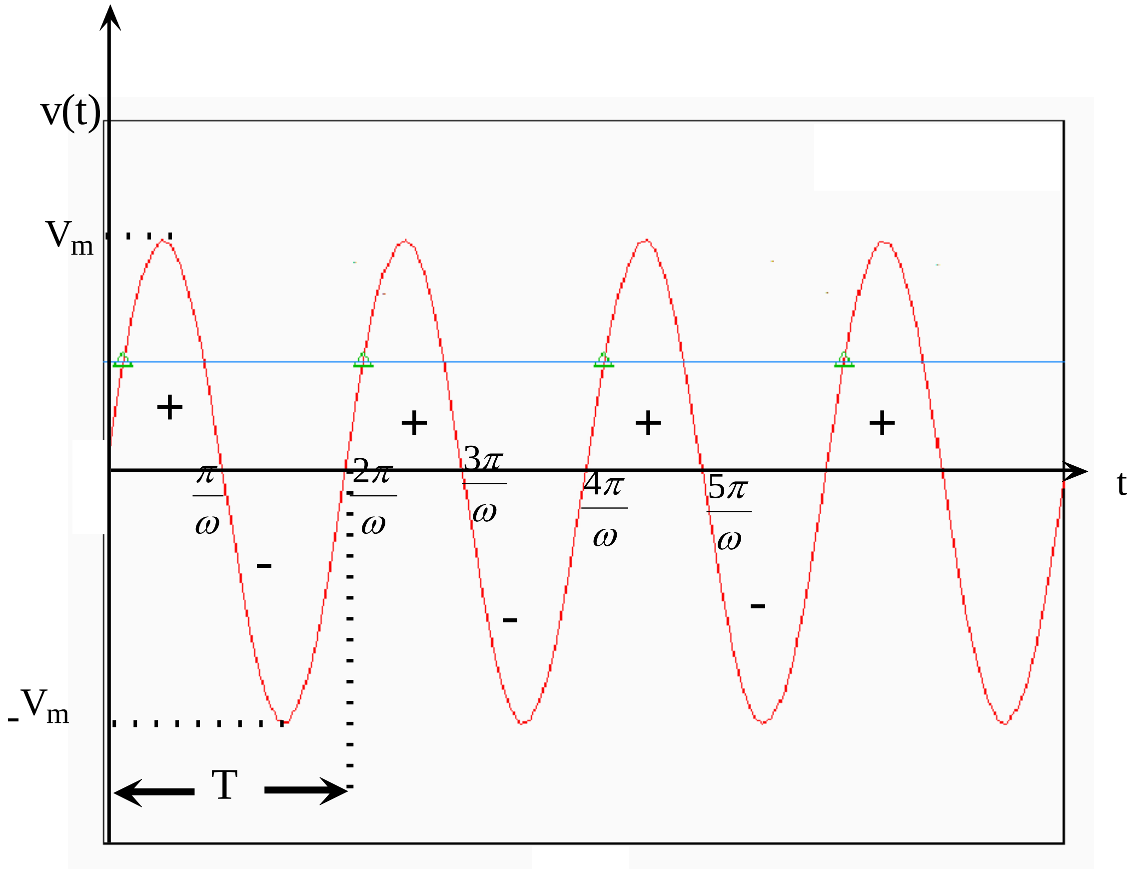


Fig.3.1. Signal sinusoïdal

Le signal sinusoïdal est représenté par l’expression suivante : $v(t) = V_m \sin(\omega t)$

Avec :

- Amplitude V_m
- Fréquence angulaire : $\omega(rad/s)$
- C’est une fonction périodique car $v(t+T) = v(t)$
- Période $T = 2\pi/\omega$
- Fréquence : $f = 1/T = \omega/2\pi \Rightarrow \omega = 2\pi f$ (f :cycles/s = hertz)

De façon plus générale, $v(t) = V_m \sin(\omega t + 0)$, 0 : angle de phase, en radians ou en degrés.

3.1.1 Valeur moyenne :

La valeur moyenne d'une onde sinusoïdale est le module moyen d'un demi-cycle (T/2) qui commence avec un module nul. On prend un demi-cycle comme référence, car la valeur moyenne d'un cycle = zéro. En effet, la partie positive du signal présentée durant un demi-cycle s'annule durant le demi-cycle suivant.

$$V_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T v\,dt = 0$$

La valeur moyenne d'une onde (signal) sinusoïdale est le module moyen sur une période d'un demi-cycle (T/2) qui commence avec un module nul.

$$V(t) = V_M \ \sin\,(\omega t + 0) \quad (\frac{2\pi}{\omega} = T)$$

Donc la valeur moyenne sur une demi période est :

$$V_{moy} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{\varpi T}{2}} V_m \sin(\omega t)\,dt$$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$ car

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$V_{moy} = \frac{2}{T}\int_0^{\pi} V_m \sin(\omega t)\,dt = V_{moy} = \frac{\omega V_M}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(\omega t)\,dt$$

$$V_{moy} = \frac{\omega V_M}{\pi}\,\frac{1}{\omega}\,\left[-\cos(\omega t)\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{V_{moy} = \frac{2V_M}{\pi}}$$

3.1.2. Valeur efficace (RMS)

On a vu que des courants/tensions périodiques fournissent une puissance moyenne non nulle aux charges résistives. Cette puissance dépend des formes d'onde appliquées. Il est intéressant d'avoir une méthode pour comparer la puissance fournie par des sources quelconques. Une de ces méthodes emploie la valeur efficace ou RMS (root-mean(square) des courants/tensions périodiques.

La valeur efficace (RMS) d'un courant ou d'une tension périodique c'est la valeur qui correspond au courant ou à la tension continu(e) (DC) qui fournirait la même puissance à une résistance R.

$$P_{moy} = RI^2{}_{RMS} = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2\, dt$$

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\, dt}$$

On trouve de même :

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2 dt} \text{ avec } v(t) = V_M \sin(\omega t + \phi)$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{\omega V_M{}^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega t)\, dt}$$

ωt varie en fonction de t selon la tableau suivant :

t	ωt
T	2π

$\Rightarrow$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{\omega V_M{}^2}{\cancel{2}\pi}\cancel{2}\int_0^{\pi} \sin^2(\omega t)\, dt}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{\omega V_M{}^2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(\omega t)\, dt}$$

pour calculer l'intégral de $\int \sin^2$, on a besoin des transformations suivantes :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, avec a=b = x

$\Rightarrow \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, or $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2(x) = (1 - \sin^2 x) - \cos 2x \Rightarrow$$

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos 2x \Rightarrow \boxed{\sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{\omega V_M{}^2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right) dt}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{\omega V_M{}^2}{2\pi}\left[\frac{\omega t}{\omega}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{2\omega}\sin\,(2\omega t)\right]_0^{\pi}}$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{\cancel{\omega}V_M{}^2}{2\pi\cancel{\omega}}[\pi]\; - [0]} \Rightarrow V_{RMS} = \sqrt{\frac{V_M{}^2\pi}{2\pi}} = \sqrt{\frac{V_M{}^2}{2}}\;\boxed{=\frac{V_M}{\sqrt{2}}}$$

Pour un courant sinusoïdal $i(t) = I_m \sin(\omega t + 0)$ $\quad (\frac{2\pi}{\omega} = T)$, on a

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{\omega I^2{}_m}{\pi}\int_0^{T}\sin^2(\omega t)\; dt}$$

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{\omega I_m}{\pi}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos(2\omega t))\; dt}$$

Si on le calcule comme c'était le cas pour le calcul de V_{RMS} , on obtient :

$$\boxed{I_{RMS} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

Note : La valeur RMS est indépendante de la fréquence ω et de la phase ϕ ; elle ne dépend que de l'amplitude du signal.

Note : La valeur efficace est fort employée lorsqu'il s'agit de produire et de distribuer de l'énergie.

Exemple : Déphasage (opposition de phase), $\phi = \frac{\pi}{\omega}$

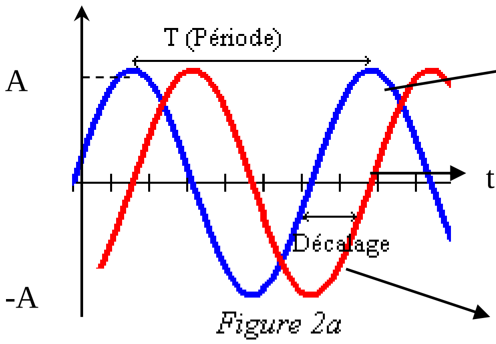
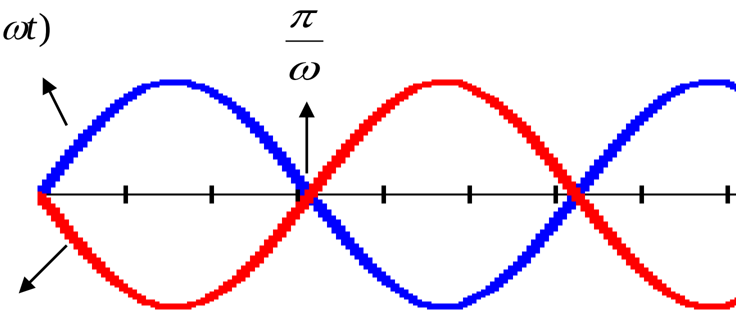


Figure 2a

$v_1(t) = A\sin(\omega t)$



$v_2(t) = A\sin(\omega t + \frac{\pi}{\omega})$

Figure 2b

Lorsque l'on compare deux signaux de même fréquence, il est nécessaire d'indiquer de combien de temps ils sont décalés. On parle alors de déphasage

- On dit que les signaux sont « en phase » s'ils sont superposés.
- La figure 2a représente des signaux déphasés de 90°.
- La figure 2b représente des signaux en « opposition de phase » : déphasés de 180°.

Quand $\frac{\pi}{\omega} = 0$. On dit que $v_1\ (t)$ précède $v_2\ (t)$ de ϕ degré ou radians.

Note : Un cosinus n'est qu'un sinus décalé : $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90°)$

$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega t)$ **et** $\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t)$

3.2 Représentation des grandeurs sinusoïdales

3.2.1. Représentation par des valeurs instantanées

C'est une représentation cartésienne de la tension et du courant par leurs valeurs instantanées

$i(t) = I_M\ \cos(\omega t + \varphi_i)$ et $v(t) = V_M\ \cos(\omega t + \varphi_v)$

La différence de phase entre la tension et le courant s'écrit :

$\varphi = \varphi_v - \varphi_i$ Lorsqu'elle est :

- Nulle $\varphi = 0$, la tension et le courant sont en phase,
- Positive $\varphi > 0$, la tension est en avance de phase par rapport au courant.
- Négative $\varphi < 0$, la tension est en retard de phase par rapport au courant.

3.2.2. Représentation par le diagramme vectoriel :

Cette méthode graphique pour laquelle, on associe à la grandeur sinusoïdale $v(t)$ et $i(t)$ un vecteur $\overrightarrow{OM}$, soit :

$g(t) = G_{eff}\ \sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi)$, c'est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et $g(0) = G_{eff}\ \sqrt{2}\cos(\varphi)$ c'est le vecteur $\overrightarrow{OM}_0$. La phase se réduit à un angle polaire φ, $\overrightarrow{OM}_0$ est le vecteur tournant $\overrightarrow{OM}$ à l'instant t=0 et son module est généralement considéré comme étant **la valeur efficace** de la grandeur $g(t)$:

$$\left|\overrightarrow{OM}_0\right| = G_{eff}$$

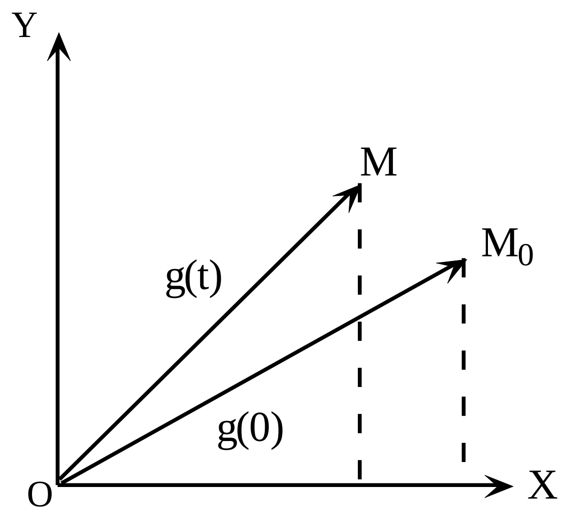


Fig.3.3. Représentation par le diagramme de Fresnel

Pour la mesure des angles dans le plan, le sens positif adopté est le sens trigonométrique. La représentation vectorielle ou le FRESNEL est assez pratique pour la détermination de la somme de grandeurs sinusoïdales de même pulsation.

3.3.3 Représentation par des nombres complexes :

Les grandeurs électriques en régime sinusoïdal sont complexes, donc ils peuvent être représentés par un vecteur dans un plan complexe.
Rappel sur les nombres complexes.
Sous forme **cartésiennes**, $A = a + jb$, avec

- a : partie réelle ($a = Ré[A]$)
- b : partie imaginaire $(b = \mathrm{Im}[A])$ et
- $j = \sqrt{-1}$

Sous forme polaire :

Module

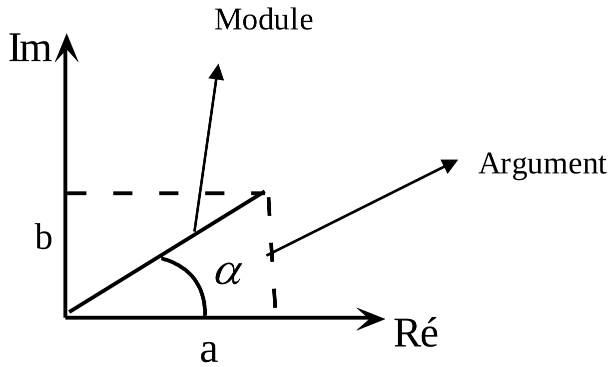
$$A = |A| e^{j\alpha} = |A| \angle\alpha$$

Argument

$|A| =$ module de A = $\sqrt{a^2 + b^2}$

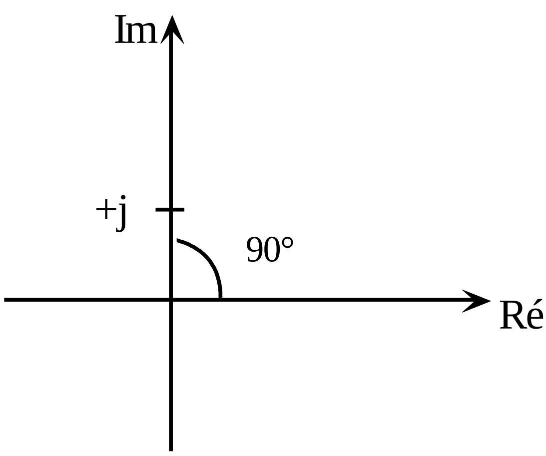
$\alpha = a\tan\dfrac{b}{a} =$ argument de A

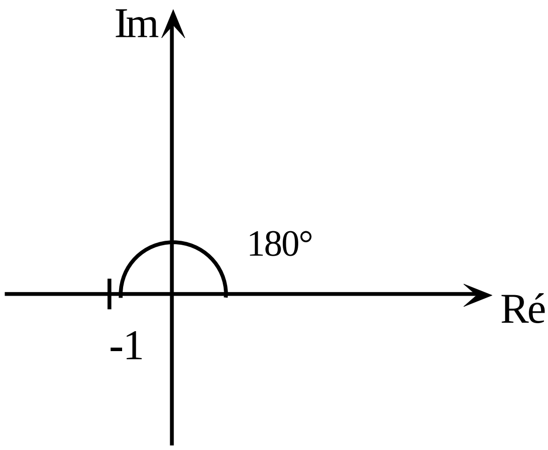
Dans le plan complexe :



Quelques résultats intéressants :

$j \leftrightarrow 1\angle 90°$ $\quad$ $j^2 = j \; x \; j = (\sqrt{-1})^2 = -1 = 1\angle 180°$





Avec la formule d'Euler, on a que :

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$ (Euler)

$$V_m \, e^{j\omega t} = V_m \, \cos\omega t + jV_m \sin\omega t$$

$$V_m \cos\omega t = \mathrm{Re}\left\lfloor V_m\ e^{j\omega t} \right\rfloor = X \ ,$$

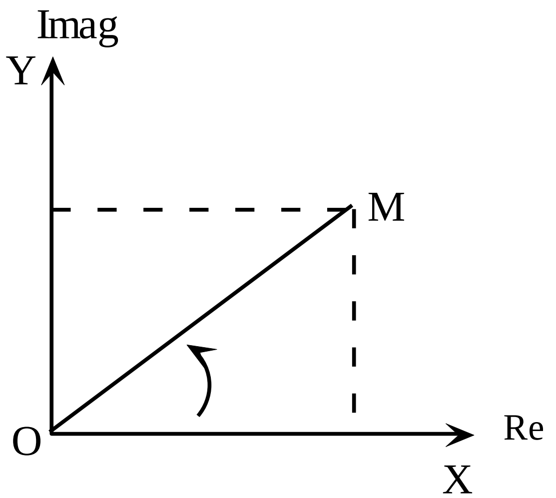
$$V_m \sin\omega t = \mathrm{Im}\left\lfloor V_m\ e^{j\omega t} \right\rfloor = Y$$

Pour la représentation complexe le vecteur OM qui présente la grandeur sinusoïdale est décomposé en deux composantes ou deux parties :

$$X = G_{eff}\ \sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \text{ et } Y = G_{eff}\ \sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$$

$G_{eff} = G$ efficace

$$g(t) = G_{eff}\ \sqrt{2}\Big\lfloor \underbrace{\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)}_{e^{j(\omega t + \varphi^{\circ})}} = G_{eff}\ \sqrt{2}\ e^{j(\omega t + \varphi^{\circ})} \Big\rfloor$$



On a constaté précédemment que les exponentielles sont plus faciles à traiter que les sinusoïdes.

3.3. Impédance et admittance en régime sinusoïdal :

La réponse d'un circuit RLC à une tension appliquée sinusoïdale, ou à un courant sinusoïdal, est également sinusoïdale. Lorsque les grandeurs caractéristiques, telle que $v(t)$ et $i(t)$, sont des fonctions du temps, nous considérons le circuit dans le domaine du temps (domaine temporel, c.a.d. ω est constante et t variable). Lorsque dans l'analyse du circuit nous utilisons les grandeurs complexes associées, soit $\underline{\mathbf{V}}$ et $\underline{\mathbf{I}}$**,** appelées également amplitudes complexes, nous considérons le circuit dans le domaine des fréquences (domaine fréquentiel). La tension et l'intensité du courant s'écrivent respectivement.

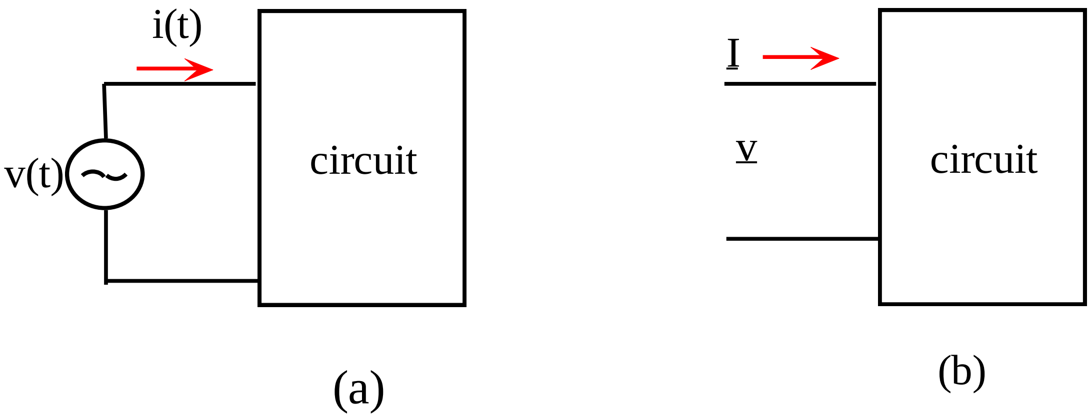


Fig. 3.4. Circuit électrique en différent domaine
a) Domaine du temps
b) Domaine des fréquences

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v) = \mathrm{Re}\left[\underline{V}\, e^{j\omega t}\right] \text{ et } \underline{V} = V \angle \varphi_v$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i) = \mathrm{Re}\left[\underline{I}\, e^{j\omega t}\right] \text{ et } \underline{I} = I \angle \varphi_i$$

$$v(t) = V_M\, e^{j(\omega t + \varphi_v)} = \underbrace{V_M\, e^{j\varphi_v}}_{\underline{V}} e^{j\omega t} = \underline{V} e^{j\omega t}$$

$$i(t) = I_M\, e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underbrace{I_M\, e^{j\varphi_i}}_{\underline{I}} e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t}$$

avec :

$$\underline{V} = V_M\, e^{j\varphi_v}$$

$$\underline{I} = I_M\, e^{j\varphi_i}$$

On appelle impédance, le rapport suivant :(dans le domaine fréquentiel)

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{V_M\, e^{j\varphi_v}}{I_M\, e^{j\varphi_i}} = \frac{V_M}{I_M} e^{j\varphi_v} e^{-j\varphi_i} = \frac{V_M}{I_M} e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

Z s'exprime en Ohm (V/A = Ohm) et, sous forme polaire :

$$\underline{Z} = R + jX$$

R et X sont réels et sont fonction de ω
* R : composant résistif
* X : composant réactif
Le module de Z :

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta_z = arc\tan\frac{X}{R} \qquad R = |Z|\cos\theta_z \qquad X = |Z|\sin\theta_z$$

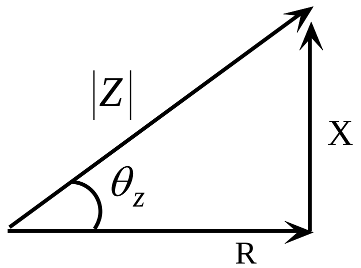
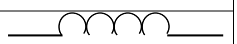
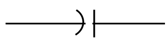


Fig. 3.5. Les différentes composantes d'impédance Z

On a donc :

Eléments	**Impédance**	**Nature de l'impédance**	**Représentation**
R	Z=R	Réelle	
L	$Z = j\omega L = \omega L\, e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega\, L\angle 90$	Complexe	
C	$Z = 1/\, j\omega\, C = -j(1/\omega C) = (1/\omega C)\angle -90$	Complexe	

Notes :
- Pour une résistance, l'impédance est purement résistive (réelle seulement).
- Pour une inductance ou une capacité, l'impédance est purement réactive (complexe seulement).

$$X_L = \omega L \quad \underline{Z}_L = jX_L$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad \underline{Z}_C = jX_C$$

- Si X = 0 $\rightarrow$ impédance résistive
- Si X<0 $\rightarrow$ impédance capacitive
- Si X>0 $\rightarrow$ impédance inductive

L'**admittance**, c'est l'inverse de l'impédance.

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB \text{ et } \qquad \underline{Z} = R + jX \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underbrace{R + jX}_{Z}} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{\underbrace{R^2 + X^2}_{G}} - j\frac{X}{\underbrace{R^2 + X^2}_{B}}$$

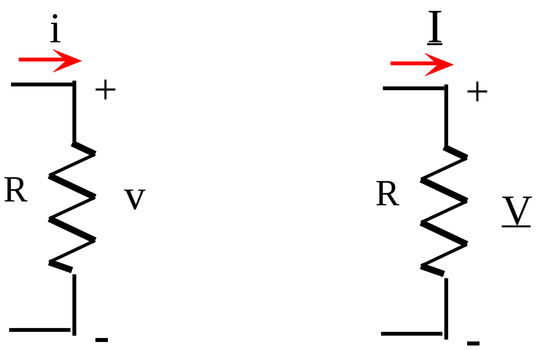
$\Rightarrow$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \text{ et } B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

- C'est un peu comme la conductance qui est l'inverse de la résistance.

<u>3.3.1. Circuit résistif</u> $v(t) = Ri(t)$

Si nous appliquons une tension complexe $v(t) = V_M \sin(\omega t)$ on obtiendra un courant complexe $i(t) = I_M \sin(\omega t)$



$$v(t) = R\, i_M \sin(\omega t)$$

Donc on trouve que le courant et la tension sont en phase.

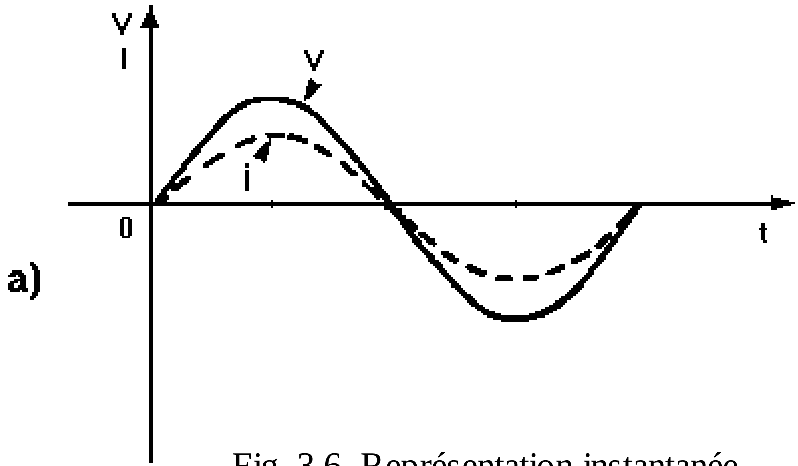
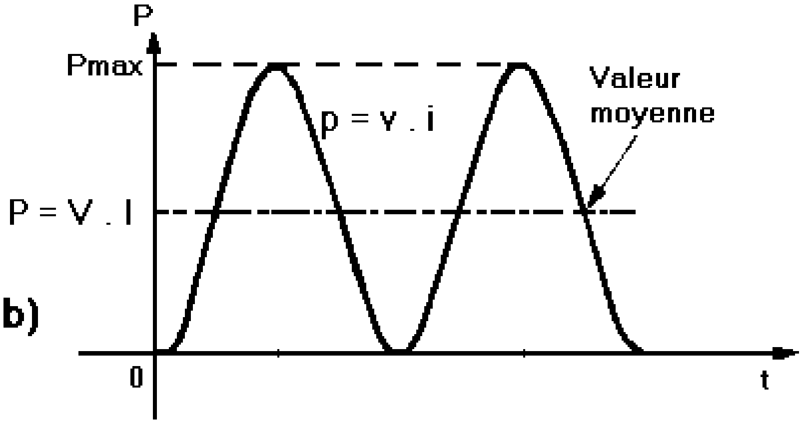


Fig. 3.6. Représentation instantanée



. - Allure de la tension, du courant et de la puissance pour un circuit résistif.

Ce qui donne sous la forme complexe :

$$\underline{V} = R\underline{I} \quad \text{où} \quad \underline{V} = V_M \angle \theta_v \qquad\qquad \underline{I} = I_{m \angle \theta_i}$$

$$R = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{V_M \angle \theta_v}{I_{m \angle \theta_i}} = \frac{V_M}{I_m} \quad \text{, (car } \theta_v = \theta_i \text{)}$$

On voit immédiatement que :

$$V_m = RI_m \quad \text{et} \quad \theta_v = \theta_i$$

Donc la loi d'ohm est identique dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Puisque $\theta_v = \theta_i$, le courant et la tension sont dit **en phase** pour une résistance.

Dans le plan complexe :

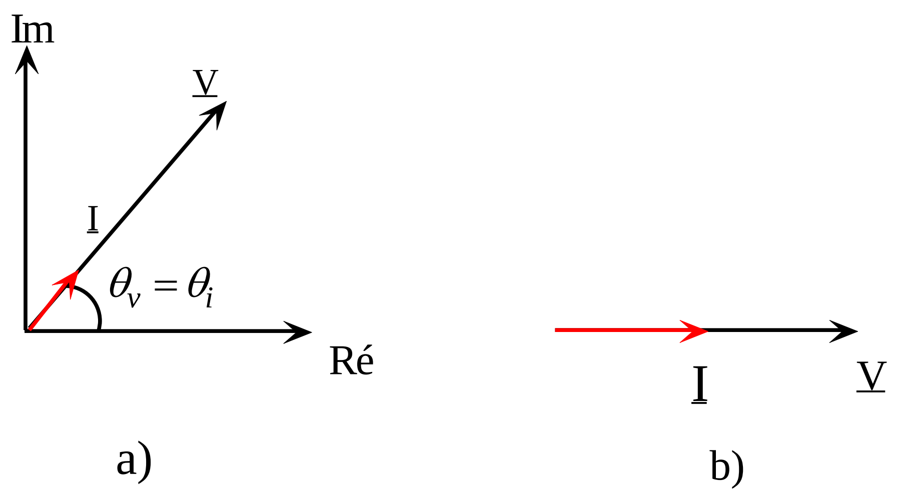


Fig. 3.7. Représentation a) complexe
b) vectorielle (FRESNEL)

3.3.2. Circuit inductif $v = \frac{L\,di(t)}{dt}$

Le courant qui passe à travers une inductance a une forme sinusoïdale $i(t) = I_M \sin(\omega t)$, donc la tension aux bornes dans le domaine temporel, est :

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}\, I_M \sin(\omega t)$$

$$v(t) = \underbrace{L\,\omega}_{X_L} I_M \cos(\omega t) = \underbrace{X_L\ I_M}_{V_M} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

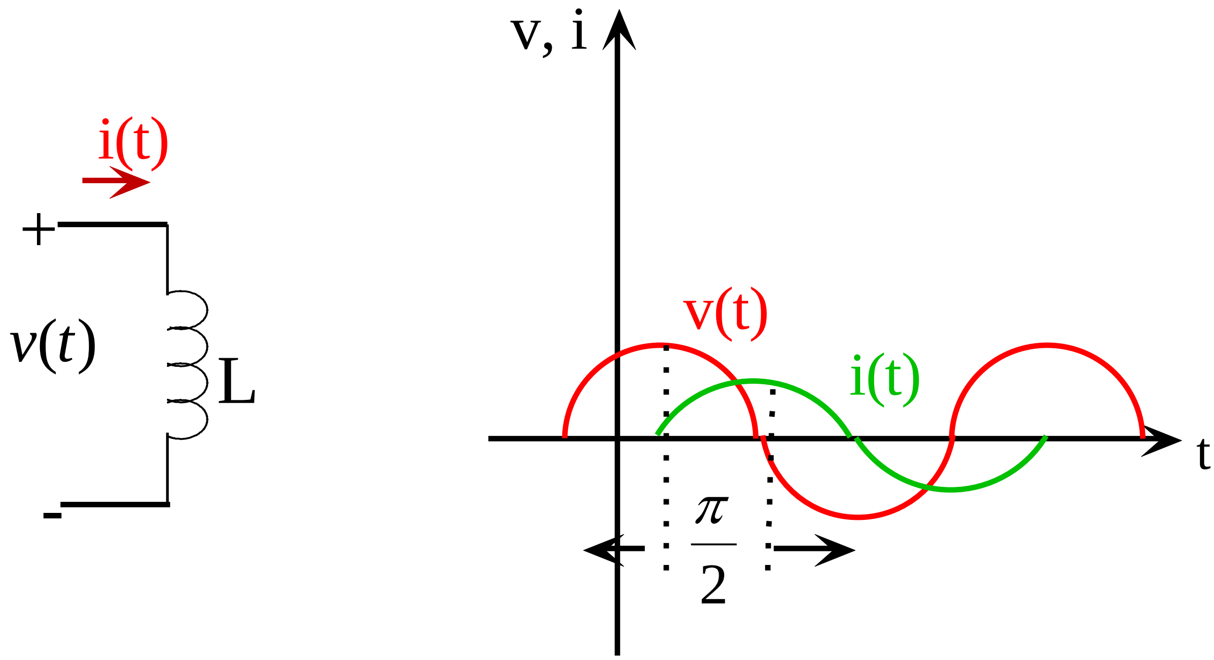


Fig. 3.8 Représentation instantanée (en fonction du temps) de la tension et du courant à travers une bobine

Dans le domaine fréquentiel ou complexe, on peut alors substituer les courants et tension de la manière suivante :

$$V = V_m\, e^{j(\omega t+\theta_v)} = \underbrace{V_m\, e^{j\theta_v}}_{\underline{V}}\, e^{j\omega t} = \underline{V}\, e^{j\omega t}$$

et $$I = I_m\, e^{j(\omega t+\theta_i)} = \underbrace{I_m\, e^{j\theta_i}}_{\underline{I}}\, e^{j\omega t} = \underline{I}\, e^{j\omega t}$$

$$V = L\, dI(t)/dt \Rightarrow V = \underline{V}\, e^{j\omega t} = j\omega L\, \underline{I}\, e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$V_m\, e^{j\omega t}\, e^{j\theta_v} = \underline{V}\, e^{j\omega t} = j\omega L\, \underbrace{I_m e^{j\theta_i}}_{\underline{I}}\, e^{j\omega t} = \underbrace{j\omega L\, \underline{I}}_{\underline{V}}\, e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{V} = j\omega L \underline{I}}$$

C’est donc comme la loi d’ohm avec comme facteur de proportionnalité $j\omega L$

où $\underline{V} = V_m \angle\theta_v$ et $\underline{I} = I_m \angle\theta_i$

$$\underline{V} = j\omega L I_m \angle\theta_i = V_m e^{j\varphi_v} = V_m \angle\varphi_v \Rightarrow$$

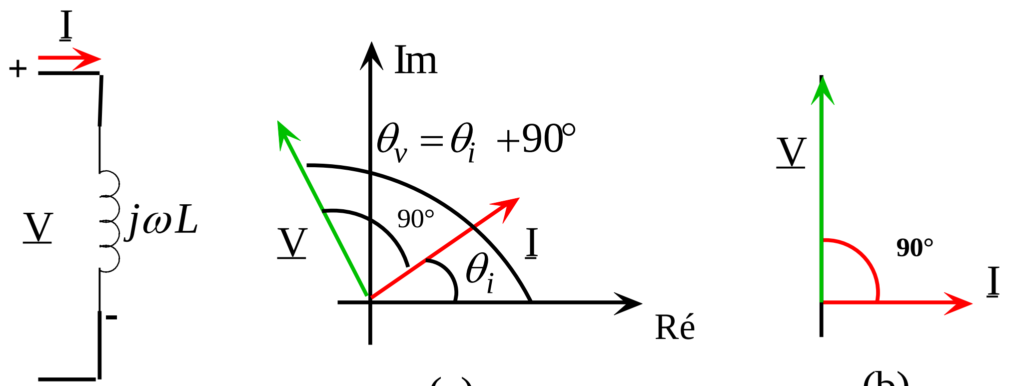
$$V_m e^{j\varphi_v} = \underbrace{j}_{e^{j\frac{\pi}{2}}} \omega L I_m e^{j\varphi_i} = e^{j\frac{\pi}{2}} \omega L I_m e^{j\varphi_i} = \omega L I \, e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi_i}$$

$\Rightarrow$

$$V_m e^{j\varphi_v} = \omega L I \, e^{j(\frac{\pi}{2}+\varphi_i)} \Rightarrow$$

$$V_m = \omega L I$$ et

$$e^{j\varphi_v} = e^{j(\frac{\pi}{2}+\varphi_i)} \Rightarrow \varphi_v = \frac{\pi}{2} + \varphi_i \Rightarrow \varphi_v - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$



(a) (b)

Pour résumer :

$$i = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \Rightarrow I = I_m \angle\theta_i$$

$$\underline{V} = j\omega L \underline{I} = j\omega L (I_m \angle\theta_i) = (\omega L) e^{90^\circ j} I_m e^{j\theta_i} = \omega L I_m \, e^{j(\theta_i + 90^\circ)}$$

$$\omega L I_m = V_m \text{ et } \angle\theta_i + 90 = \theta_v$$

On voit donc que pour une **inductance,** il y a un retard de 90 degrés entre le courant et la tension : **courant en retard de 90 degrés.** Autrement dit la tension est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au courant (en quadrature de phase).

3.3.3. Circuit capacitif $i = C\,dv/dt$ et avec :

La tension qui passe à travers une capacité a une forme sinusoïdale $v(t) = V_M \sin(\omega t)$, donc la tension aux bornes est :

$$i(t) = C\frac{d\,v\,(t)}{d\,t} = C\frac{d}{dt}V_M \sin(\omega t)$$

$$i(t) = \underbrace{C\,\omega}_{\frac{1}{X_C}} V_M \cos(\omega t) = \underbrace{\frac{V_M}{X_C}}_{I_M} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

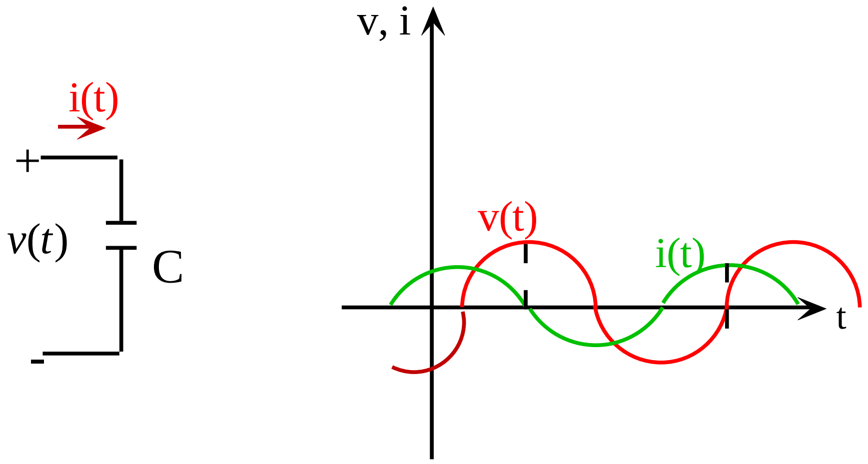


Fig. 3.10. Représentation instantanée de la tension et du courant à travers un condensateur

Substituons les courant et tension complexes :

$$v(t) = V_m\; e^{\,j(\omega t + \theta_v)}$$

$$i(t) = I_M\; e^{j(\omega t + \theta_i)} =$$

$$i(t) = C\frac{d}{d\,t}v(t) = C\frac{d}{d\,t}\underbrace{V_m\; e^{\,j(\omega t + \theta_v)}}_{v(t)}$$

$$I_m \underbrace{e^{j(\omega t+\theta_i)}}_{\cancel{e^{j\omega t}} e^{j\theta_i}} = j\omega C V_m \underbrace{e^{j(\omega t+\theta_v)}}_{\cancel{e^{j\omega t}} e^{j\theta_v}}$$

On divise par $e^{j\omega t}$

$$I_m e^{j\theta_i} = j\omega C V_m e^{j\theta_v} \Rightarrow$$

$$V_m e^{j\theta_v} = \frac{I_m}{j\omega C} e^{j\theta_i} = \underbrace{-j}_{e^{-j\frac{\pi}{2}}} \frac{I_m}{\omega C} e^{j\theta_i}$$

Rappel : $\underline{V} = V_m e^{j\theta_v}$ $\quad \underline{I} = I_m e^{j\theta_i}$ $\quad \frac{1}{j} = -j$

$$\underline{I} = j\omega C \underline{V}$$

$$\underline{V} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I} \qquad \text{ou} \qquad \underline{V} = \frac{-j}{\omega C}\underline{I}$$

C'est comme la loi d'ohm avec $R = 1/(j\omega C)$

$$\underline{V} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \frac{1}{\omega C}\frac{1}{e^{j90°}}\underline{I} = \frac{\overbrace{e^{-j90°}}^{\frac{1}{j}=-j}}{\omega C}\underline{I}$$

On a donc un déphasage de 90° degrés.

$$V_m e^{j\theta_v} = \frac{I_m}{\omega C} e^{j(\theta_i - 90°)} \Rightarrow \theta_v = \theta_i - 90° \Rightarrow \theta_i = \theta_v + 90°$$

La tension est en retard sur le courant

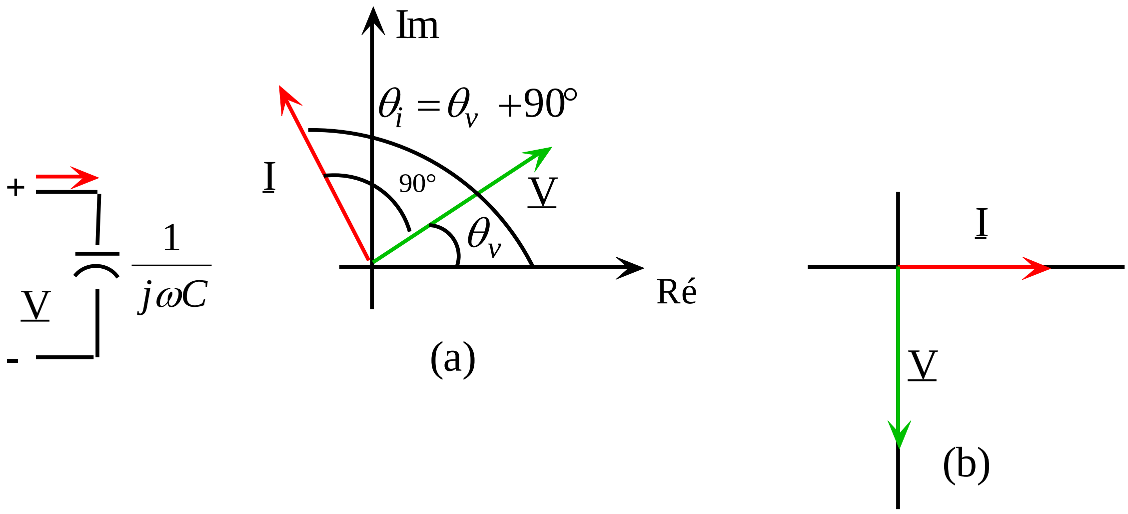


Fig.3.11

3.3.4. Circuit RL simple

Trouvons la réponse forcée du circuit

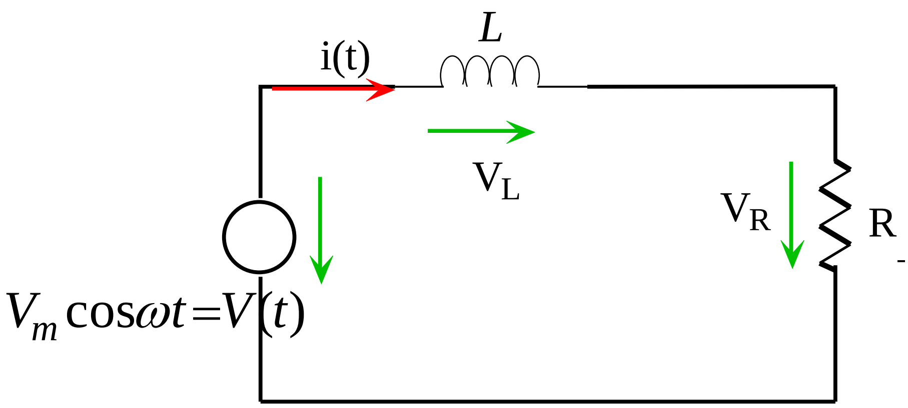


Fig.3.12. Circuit RL en régime sinusoïdal

$$V_L = L\frac{d\ i}{dt}$$

on a d'après la loi des mailles : $$\underbrace{L\frac{d\,i}{d\,t}}_{V_L(t)} + \underbrace{R\,i}_{V_R(t)} = \underbrace{V_m\ \cos\omega t}_{V(t)} \qquad \textbf{(1)}$$

Résolvons cette équation, on pose :

$i_f = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, A et B étant des coefficients directeurs

Remplaçant dans (1) :

$$L\omega(-A\sin\omega t+B\cos\omega t)+R\,(A\cos\omega t+B\sin\omega t)=V_m\,\cos\omega t\Rightarrow$$

$$L\omega B\cos\omega t+RA\cos\omega t+RB\sin\omega t-L\omega A\sin\omega t=V_m\,\cos\omega t\Rightarrow$$

$$\underbrace{(L\omega B+RA)}_{V_m}\cos\omega t+\underbrace{(RB-L\omega A)}_{0}\sin\omega t=V_m\,\cos\omega t$$

$$\Rightarrow$$

$RA+\omega BL=V_m$ et $-\omega LA+RB=0\Rightarrow$

$$B=\frac{\omega LA}{R}\Rightarrow$$

$$V_m=RA+\omega\underbrace{B}_{\frac{\omega LA}{R}}L=RA+\omega\frac{\omega LA}{R}L=RA+\frac{\omega^2L^2A}{R}\Rightarrow$$

$$V_m=\frac{R^2A+\omega^2L^2A}{R}\Rightarrow A=\frac{RV_m}{(R^2+\omega^2L^2)_m}$$ et

$$B=\frac{\omega LA}{R}=\frac{\omega L\overbrace{\frac{RV_m}{(R^2+\omega^2L^2)}}^{A}}{R}=\omega L\frac{\cancel{R}V_m}{\cancel{R}(R^2+\omega^2L^2)}=\frac{\omega LV_m}{(R^2+\omega^2L^2)}$$

$$i(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

, en remplaçant A et B par leur valeur, on obtient :

$$i(t)=\overbrace{\frac{RV_m}{(R^2+\omega^2L^2)}}^{A}\cos\omega t+\overbrace{\frac{\omega LV_m}{(R^2+\omega^2L^2)}}^{B}\sin\omega t\quad\textbf{(I)}$$

Or avec $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$ **(II)**$\Rightarrow$en égalisant (I) et (II) on obtient :

$$I_m=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{\frac{R^2V_m{}^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}+\frac{\omega^2L^2V_m{}^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}}$$

$$I_m = V_m \sqrt{\frac{R^2}{(R^2+\omega^2 L^2)^2} + \frac{\omega^2 L^2}{(R^2+\omega^2 L^2)^2}} = V_m \sqrt{\frac{\cancel{(R^2+\omega^2 L^2)}}{(R^2+\omega^2 L^2)^{\cancel{2}}}}$$

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{\sqrt{(R^2+\omega^2 L^2)}}}$$

On a donc une réponse forcée **sinusoïdale**

$$i_f = I_m \cos(\omega t + o)$$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \quad \text{et} \quad o = \arctan\left(\frac{\omega L V_m}{R V_m}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Les résultats que nous avons obtenus peuvent être mis sous une forme plus compacte en employant le concept de phaseur. Ce concept fut introduit par Charles Proteus Steinmetz.

Forme d'une tension sinusoïdale :

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

Si ω est connu, il suffit de spécifier V_m et θ pour que v soit caractérisé complètement. Le calcul dans le domaine temporel est délicat $\Rightarrow$ on adopte toujours la forme complexe ou polaire, à savoir :

$$\underline{V} = V_m e^{j\theta} = V_m \angle\theta \quad \text{où} \quad V_m \angle \theta$$

Est le phaseur ou représentation vectorielle. Les phaseurs sont représentés de différentes façons. Ils sont souvent représentés en caractères gras (**V**) ou avec une barre en dessous ($\underline{V}$).

Si

$$V = V_m \cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}\{\underbrace{V_m e^{j\theta}}_{\underline{V}} e^{j\omega t}\} \Rightarrow V = \mathrm{Re}\{\underline{V}\, e^{j\omega t}\}$$

Formules utiles :

$$\sin\theta = \cos(90-\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

3.4. Lois de Kirchhoff et combinaisons série/parallèle

Les lois de Kirchhoff demeurent valides.

$$\sum v = 0 \Rightarrow 0 = V_1 e^{j(\omega t+\theta_1)} + V_2 e^{j(\omega t+\theta_2)} + \ldots\ldots + V_N e^{j(\omega t+\theta_N)}$$

On divise par $e^{j\omega t}$:

$$\underbrace{V_1 e^{j\theta_1}}_{\underline{V}_1}\cancel{e^{j\omega t}} + \underbrace{V_2 e^{j\theta_2}}_{\underline{V}_2}\cancel{e^{j\omega t}} + \ldots\ldots + \underbrace{V_N e^{j\theta_N}}_{\underline{V}_N}\cancel{e^{j\omega t}} = 0$$

On divise par $e^{j\omega t}$

$$0 = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 + \underline{V}_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \underline{V}_N$$

De façon semblable, on a : $0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \underline{I}_N$

Si on veut trouver la réponse forcée (régime sinusoïdal permanent), on peut se servir des phaseurs et appliquer les méthodes vues précédemment pour résoudre le circuit. Lorsque la réponse est trouvée en terme de phaseurs, on peut la convertir immédiatement dans le domaine temporel.

Connexion d'impédance en série (Le courant circule dans tous les éléments)

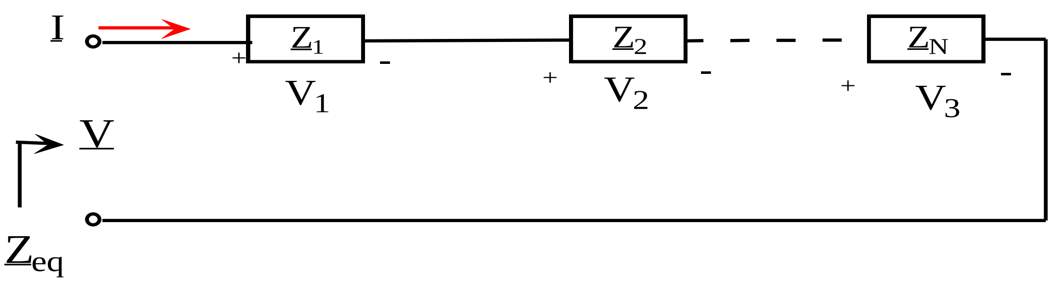


Fig. 3.13. Des impédances en série.

$$\sum v = 0 \Rightarrow \underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \ldots\ldots + \underline{V}_N$$

avec

$\underline{V}_1 = \underline{I}_1 Z_1$ $\quad\quad$ $\underline{V}_2 = \underline{I}_2 Z_2$ $\quad\quad$ et $\quad\quad$ $\underline{V}_N = \underline{I}_N Z_N$

$$\underline{V} = (Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots\ldots + Z_N)\ \underline{I}$$

$$\boxed{\frac{\underline{V}}{\underline{I}} = Z_{eq}}$$

Donc, pour des impédances en série :

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots\ldots + Z_N$$

De même, on trouve pour le circuit en parallèle :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{Z_N}$$

Cas particulier : 2 impédances en parallèle :

$$\boxed{Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

Donc, c'est comme pour une résistance :

Note : Comme la réactance dépend de la fréquence, elle peut être capacitive pour une certaine plage de fréquences et inductive pour une autre, et ce, pour le même circuit.

3.5 Théorème des réseaux

Les équivalents thévenin et Norton et la superposition fonctionnent comme pour les circuits résistifs.

Dans le cas de la superposition :

- Plusieurs sources à la même fréquence ω :
    - Choix de la méthodes des nœuds, des mailles,…
- Plusieurs sources avec $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3$
    - Il faut employer la superposition, car la définition des phaseurs ne permet de considérer qu'une seule fréquence à la fois.

Les signaux sont complexes, donc ils peuvent être représentés par un vecteur dans le plan complexe.

Exemple :

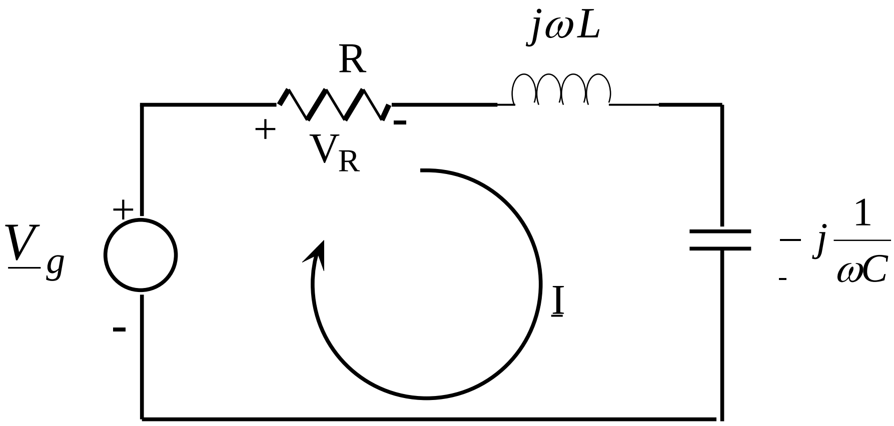


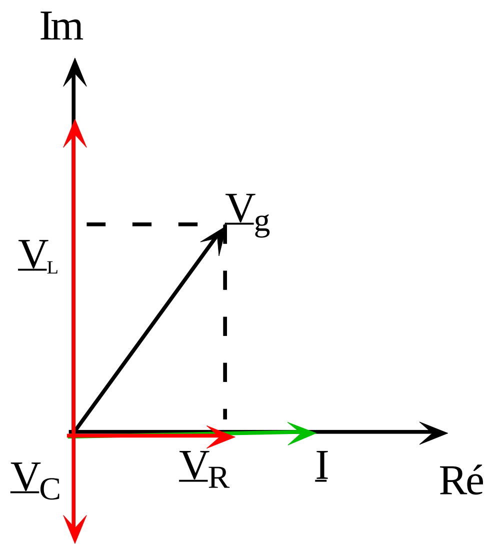
Fig.3.14. Circuit électrique en régime alternatif

Comme le courant I est commun à tous les éléments, il servira de référence. (Cette référence est une simple convention d'orientation pour le tracer dans le plan.).

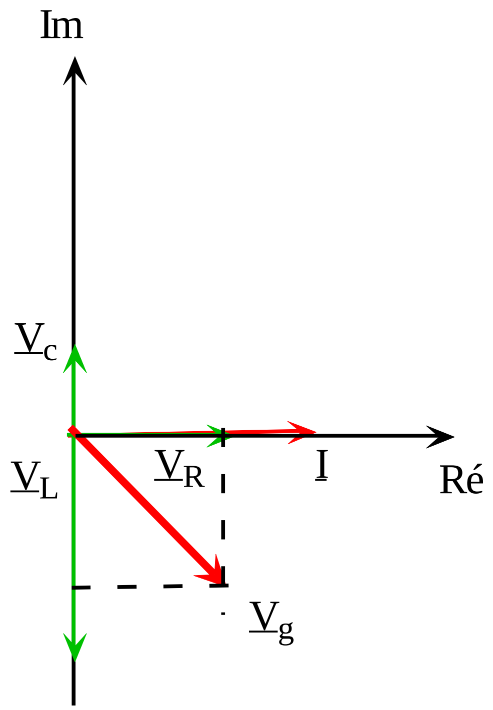
$$\left(\begin{array}{l} \underline{I} = |I| \angle 0° \\ \underline{v}_R = R\,|I| \\ \underline{v}_L = j\omega L\, I = \omega L |I| \angle 90° \\ \underline{v}_C = -j\dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{|I|}{\omega C} \angle -90° \\ \underline{v}_g = v_R + v_L + v_C \end{array}\right)$$

On a donc les diagrammes vectoriels suivants :

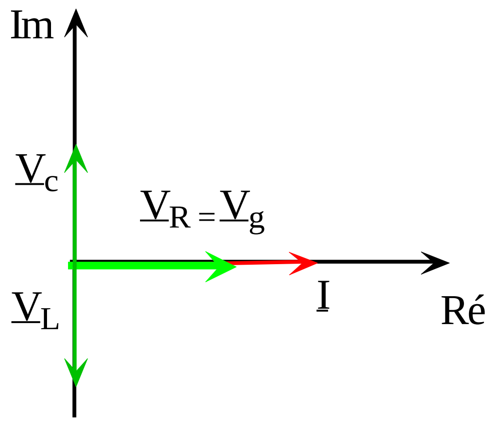
- *Réactance inductives* : Si $V_L > V_C$. La tension est en avance sur le courant :



- *Réactance capacitive :* Si $V_L < V_C$ La tension est en retard sur le courant.



Réactance nulle : Si $V_L = V_C$. La tension est en phase avec le courant



$$\underline{I} = \frac{\underline{V}_g}{Z} = \frac{\underline{V}_g}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Dans ce dernier cas on a :

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

3.6 Puissance en régime sinusoïdal permanent

Nous allons étudier la puissance provenant de sources sinusoïdales car l'électricité est produite sous cette forme.

Puissance instantanée : Taux auquel l'énergie est absorbée par un élément en fonction du temps

$$p(t) = v(t)\, i(t)$$

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \varphi_v) \text{ et } i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Donc la puissance instantanée s'écrit :

$$p(t) = V_M \; I_M \sin(\omega t + \varphi_v) \sin(\omega t + \varphi_i)$$

3.6.1. Puissance complexe totale : La puissance totale complexe d'un signal sinusoïdal est :

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{U} \; \underline{I}'$$

Avec $\underline{I}'$ est le conjugué de $\underline{I}$

3.6.2. Puissance active : la puissance active est la puissance consommée par la partie résistive du circuit.

$$P_a = \frac{1}{2} R I^2{}_M = RI^2{}_{eff}$$

Avec R est la partie réelle de l'impédance $Z = R + jS$

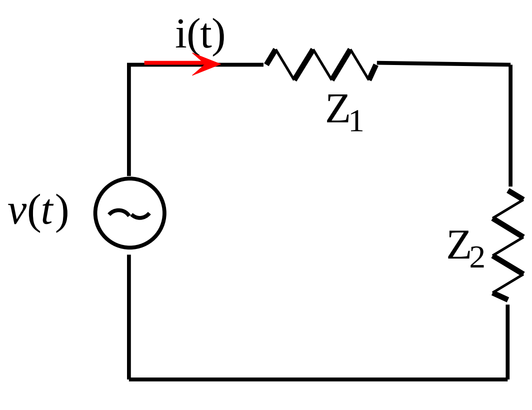
3.6.3. Puissance réactive : la puissance réactive est la puissance fournie aux parties réactives (inductive ou capacitive)

$$P_r = \frac{1}{2} S I^2{}_M = SI^2{}_{eff}$$

Avec S est la partie imaginaire de l'impédance.

Exemple :

Soit un circuit électrique ci-contre,



La tension d'entrée est : $v(t) = 100 \sin(\omega t + 20°)$

Et le courant qui traverse ce circuit est : $v(t) = 10 \sin(\omega t - 10°)$

Calculer l'impédance totale de ce circuit avec les différentes parties et la puissance consommée par chaque élément.

Solution :

En régime complexe la tension et le courant s'écrivent comme suivants :

$\underline{E} = 100\angle 20°$ et $\underline{I} = 10\angle -10°$

Donc $\underline{Z} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{I}}$ = $\dfrac{100\angle 20°}{10\angle -10°} = 10\angle 30°$ en notation polaire

Et $\underline{Z} = (8{,}66 + j5)\ \Omega$

La partie réelle de l'impédance est 8,66 Ω et la partie imaginaire est 5 Ω.

$\underline{P} = \dfrac{1}{2}\underline{U}\,\underline{I}^*$ = $\dfrac{1}{2} 100\angle 20\ x\ 10\angle 10 = 500\cos(30°) + j500\sin(30°)$ = 433 +j250

La puissance active **= 433** et la puissance réactive **= 250**.